TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Brückenschaltung

Gruppe B412

Patrick Christ und Daniel Biedermann

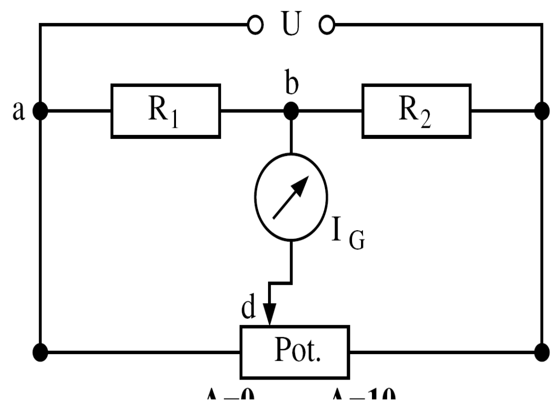
10.10.2009

0. INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG

Die Bestimmung von Widerständen durch die gleichzeitige Messung von Strom und Spannung ist sehr aufwendig, deswegen wird meist eine Vergleichsmessung vorgenommen um ohmsche und komplexe Widerstände zu ermitteln.
In diesem Experiment wird die Brückenschaltung verwendet, um diese möglichst genau zu bestimmen.

2. BESCHREIBUNG DER VERWENDETEN METHODEN



A=10 A=0

ABBILDUNG 1: WHEATSTONESCHE BRÜCKENSCHALTUNG MIT POTENTIOMETER

Die Brückenschaltung, auch Wheatstonesche Brücke genannt, gibt es in zwei Ausführungen.

Die erste operiert mit Gleichstrom und kann nur zur Bestimmung von ohmschen Widerständen verwendet werden.

Den eigentlichen Widerstand kann man jetzt mit Hilfe des Nullabgleichs und einigen simplen Formeln bestimmen. Als abgeglichen gilt die Schaltung, falls zwischen b und d kein Strom mehr fließt. Es folgt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \qquad (1)$$

Dabei ist zu beachten, dass R_1 der zu bestimmende Widerstand ist und R_2 ein bekannter Vergleichswiderstand sein muss. Der Quotient $\frac{10-A}{A}$ ersetzt den Quotienten aus Widerstand R_3 und R_4, A bezeichnet hierbei den Bruchteil von R_3 bezogen auf den Gesamtwiderstand des Potentiometers. Aus diesen Vorüberlegungen folgt sofort die einfache Formel:

$$R_1 = R_2 \cdot \frac{10-A}{A} \tag{2}$$

Um nun auch Wechselstrom Widerstände von Spulen und Kondensatoren zu bestimmen, muss der Versuchsaufbau leicht abgeändert werden. Dies führt zur zweiten Variante.

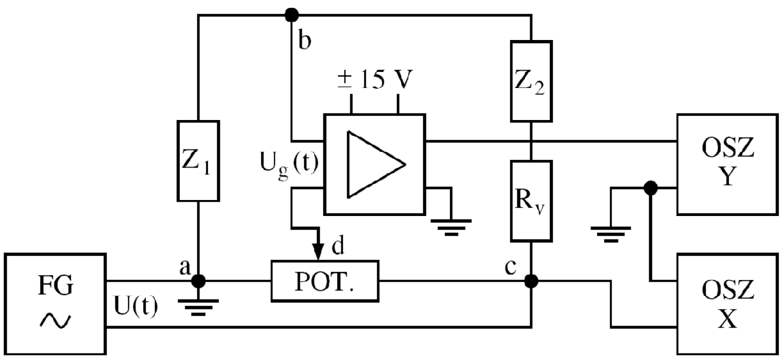


ABBILDUNG 2: VERSUCHSAUFBAU MIT WECHSELSTROMQUELLE

Auch hier beschreibt der Index 1 den zu bestimmenden Widerstand Z_1. Z_2 und R_v si000nd bekannte Größen. Sie dienen lediglich als Vergleich und dienen zusammen mit dem Potentiometer als Parameter im Nullabgleich. Für den Wechselstromwiderstand liefern dieselben Überlegungen wie oben die folgende Formel:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{10-A}{A} \tag{3}$$

Diese Formel lautet speziell für die beiden Fälle:

1.Fall Spule:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{L_1(cot\psi_1+1)}{L_2(cot\psi_2+1)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{10-A}{A} \tag{4}$$

2.Fall Kapazität:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{10-A}{A} \tag{5}$$

Die störenden Parameter ψ_1 und ψ_2 bezeichnen die Phase der jeweiligen Ströme in Z_1 und Z_2 und treten nach Einsetzen der jeweiligen Widerstände nur bei Spulen auf, da sie sich bei Kapazitäten unter der Annahme, dass keine ohmschen Widerstände auftreten, sofort wegkürzen.
Zur Elimination dieser beiden Größen dient der Nullabgleich. Er wird bei diesem Aufbau mit Hilfe eines Oszilloskops durchgeführt. Auf ihm wird einerseits die angelegte Spannung und andererseits die Spannung zwischen b und d angezeigt, zusammen bilden sie eine sogenannte Lissajous-Figur.
Die Neigung ist dabei die Spannungsdifferenz und die Öffnungsweite ist proportional zur Phasendifferenz. Im Nullabgleich sollte die Lissajous-Figur nun folglich eine waagrechte Gerade sein, das heißt, es soll keine Spannungsdifferenz und keine Phasendifferenz geben.
Diese wird erreicht, indem man den Widerstand im Potentiometer und den variablen Widerstand R_V verändert. Dabei bewirkt eine Veränderung des Potentiometerwiderstands eine Änderung der Neigung und der Widerstand R_V variiert den Öffnungswinkel. Es folgen die einfachen Beziehungen (4) und (5).

3. Bearbeitung der Aufgaben

Im Folgenden wird an einigen Beispielen die Bestimmung von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten mit obiger Methode genauer erläutert.

Zur Bestimmung ist dabei jeweils nur der Wert von A und der bekannte Widerstand erforderlich.
Am Anfang benötigt man den Versuchsaufbau, welcher in Abbildung (1) schematisch dargestellt ist.
Zur Bestimmung des unbekannten Widerstandes wird Formel (2) verwendet.

1. **Bestimmung des Gesamtwiderstandes eines Potentiometers anhand der Vergleichswiderstände $\mathbf{10\ \Omega, 30\ \Omega}$ und $\mathbf{100\ \Omega}$ bei einer anliegenden Spannung von 1,0 V**

R_1 [Ω]	$\mathbf{10,0 \pm 0,1}$	$\mathbf{30 \pm 0,3}$	$\mathbf{100 \pm 1}$
A	$5,00 \pm 0,01$	$7,49 \pm 0,01$	$9,09 \pm 0,01$
R_2 [Ω]	$10,0 \pm 0,1$	$10,1 \pm 0,1$	$10,0 \pm 0,2$

Alle drei Werte stimmen innerhalb der Unsicherheiten überein, damit erhält man für den Widerstand des Potentiometers den gewichteten Mittelwert: $R_{2\ Mittel} = (10,00 \pm 0,04)\boldsymbol{\Omega}$

2. **Messung des ohmschen Widerstandes R_{Spule} zweier Spulen mit Unsicherheiten. Anliegende Spannung hierbei beträgt $(\mathbf{1,00 \pm 0,01})\ \boldsymbol{V}$ und der Vergleichswiderstand R ist $(\mathbf{10,0 \pm 0,1})\ \mathbf{\Omega}$.**

Spulen Nummer	1 (kleine Spule)	2 (große Steckspule)
A	$3,97 \pm 0,01$	$0,57 \pm 0,01$
R_{Spule} [Ω]	$6,58 \pm 0,07$	$6,58 \pm 0,07$

Abgriff der halben Spulenlänge	Anfang / Mitte	Mitte / Ende
A	$0,29 \pm 0,05$	$0,33 \pm 0,05$
R_{halbe} [Ω]	$0,28 \pm 0,01$	$0,34 \pm 0,01$

3. **Messung des Ohmschen Widerstandes einer Glühbirne**

3.1 Feste Spannung von U = $(\mathbf{1,00 \pm 0,01})\ \boldsymbol{V}$

R_2 [Ω]	$\mathbf{10,0 \pm 0,1}$	$\mathbf{30,0 \pm 0,3}$	$\mathbf{100 \pm 1}$	$\mathbf{200 \pm 2}$
A	$7,36 \pm 0,01$	$3,56 \pm 0,01$	$0,63 \pm 0,01$	$0,31 \pm 0,01$
R_1 [Ω]	$27,87, \pm 0,07$	$16,58 \pm 0,03$	$6,72 \pm 0,06$	$6,39 \pm 0,10$
I [A]	$0,026 \pm 0,001$	$0,021 \pm 0,002$	$0,009 \pm 0,002$	$0,005 \pm 0,002$
$P = R_1 \cdot I^2$ [W]	$0,0198 \pm 0,0006$	$0,0076 \pm 0,0001$	$0,0006 \pm 0,0001$	$0,0002 \pm 0,0001$

3.2 Fester Vergleichswiderstand von $(\mathbf{10,0 \pm 0,1})\ \boldsymbol{\Omega}$.

U [V]	$\mathbf{2,00 \pm 0,01}$	$\mathbf{3,00 \pm 0,01}$	$\mathbf{4,00 \pm 0,01}$	$\mathbf{5,00 \pm 0,01}$	$\mathbf{6,00 \pm 0,01}$
A	$8,18 \pm 0,01$	$8,45 \pm 0,01$	$8,63 \pm 0,01$	$8,75 \pm 0,01$	$8,85 \pm 0,01$
R_1 [Ω]	$44,9 \pm 0,1$	$54,5 \pm 0,2$	$63,0 \pm 0,3$	$70,0 \pm 0,3$	$76,9 \pm 0,3$
I [A]	$0,036 \pm 0,1$	$0,046 \pm 0,1$	$0,054 \pm 0,2$	$0,063 \pm 0,2$	$0,074 \pm 0,2$
P [W]	$0,059 \pm 0,003$	$0,117 \pm 0,004$	$0,189 \pm 0,004$	$0,273 \pm 0,005$	$0,42 \pm 0,007$

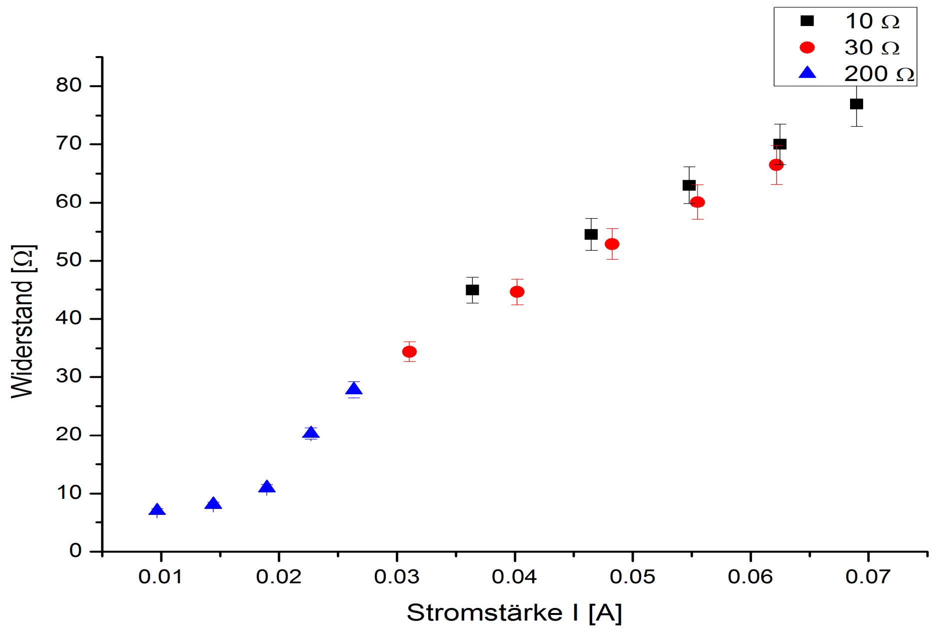
3.3 Fester Vergleichswiderstand von $(30,0 \pm 0,3)\ \Omega$

U [V]	$2,00 \pm 0,01$	$3,00 \pm 0,01$	$4,00 \pm 0,01$	$5,00 \pm 0,01$	$6,00 \pm 0,01$
A	5,34± 0,01	5,98± 0,01	6,38± 0,01	6,67± 0,01	6,89± 0,01
R_1 [Ω]	34, 4± 0,2	44,6± 0,2	52,9± 0,2	60, 1± 0,3	66, 5± 0,3
I [A]	0,031± 0,001	0,040± 0,001	0,048± 0,002	0,056± 0,002	0,062± 0,003
P [W]	0,033± 0,003	0,072± 0,004	0,123± 0,004	0,185± 0,006	0,257± 0,007

3.4 Fester Vergleichswiderstand von $(200 \pm 2)\ \Omega$

U [V]	$2,00 \pm 0,01$	$3,00 \pm 0,01$	$4,00 \pm 0,01$	$5,00 \pm 0,01$	$6,00 \pm 0,01$
A	0,34± 0,01	0,39± 0,01	0,52± 0,02	0,92± 0,03	1,22± 0,04
R_1 [Ω]	7,0± 0,3	8,1± 0,4	10,9± 0,4	20,3± 0,6	27, 8± 0,9
I [A]	0,009±0,001	0,014±0,001	0,019±0,002	0,023±0,002	0,026±0,003
P [W]	0,0007±0,0004	0,0017±0,0004	0,0039±0,0004	0,0104±0,0004	0,0193±0,0004

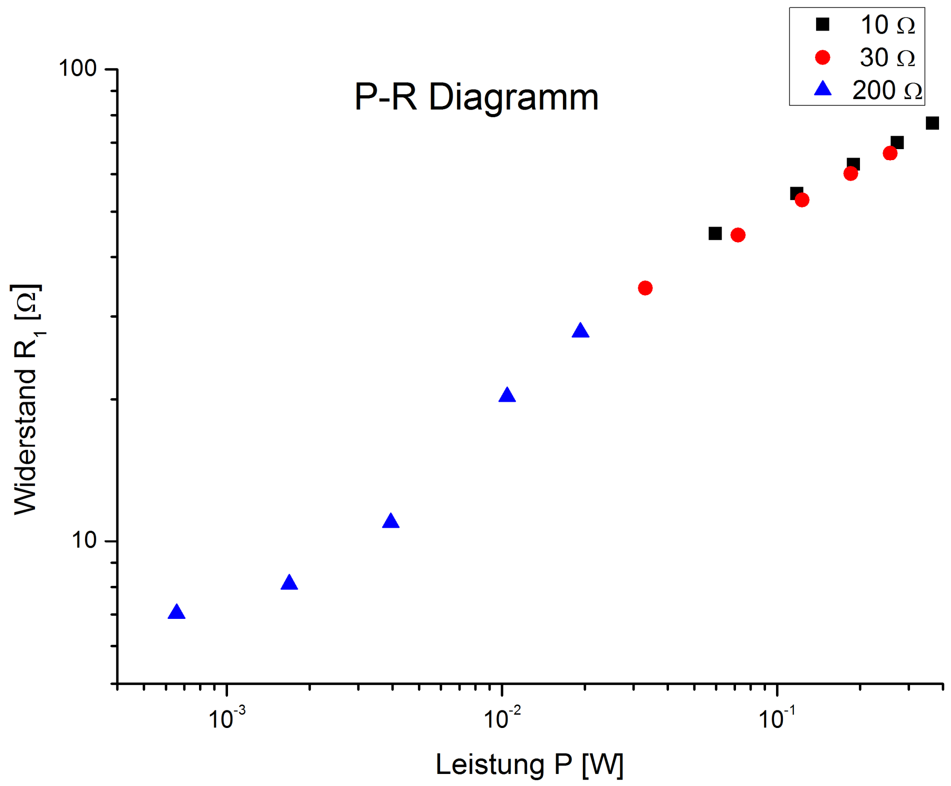
Nun werden diese Werte graphisch aufgetragen. Zunächst der Widerstand R_1 gegenüber dem Strom I in linearer Auftragung:



GRAPH 1: I – R – DIAGRAMM, DATEN AUF SEITE 8

Hier erkennt man deutlich wie der Widerstand R_1 mit dem Strom ansteigt. Bei niedrigem Strom stellt man nur einen schwachen Anstieg des Glühbirnenwendelwiderstandes fest, da diese kaum erhitzt wird. Mit zunehmender Erhöhung der Stromstärke nimmt allerdings der Widerstand der Glühbirne stärker zu, dies liegt an der Erhitzung der Glühwendel.

Der folgende Graph zeigt den Widerstand R_1 gegen die Leistung P in doppelt-logarithmischer Auftragung.



GRAPH 2: P – R – DIAGRAMM

In doppelt-logarithmischer Auftragung erkennt man, dass die Leistung an der Glühbirne bei geringem Widerstand nur schwach ansteigt. Wird jedoch I größer und somit auch R_1, steigt die abgestrahlte Leistung potentiell. Es wird also deutlich mehr Energie in Wärme umgewandelt.

Nun betrachten wir Wechselstromwiderstände, dafür benötigen wir Versuchsaufbau von Abbildung (2) und die Formeln (4) und (5).

4. **Bestimmung der Induktivität einer Spule (Spule Nummer 2). Vergleichsspule besitzt eine Induktivität von 0,0023 H.**

A = $\mathbf{4,04 \pm 0,01}$ $\boldsymbol{L_1 = (3,39 \pm 0,14) mH}$

5. **Bestimmung der Induktivität bei halber Spulenlänge von Spule 1 mit Hilfe der Spule 2 und ihrer errechneten Induktivität aus Aufgabe 4. Zu beachten ist dabei, dass, wenn man der Versuchsaufbau von Aufgabe 4 beibehält, jetzt $\boldsymbol{L_2}$ gesucht ist und $\boldsymbol{L_1}$ als gegeben gilt.**

A = $\mathbf{1,41 \pm 0,01}$ $\boldsymbol{L_2 = (0,37 \pm 0,02) mH}$

Dieser Wert für L_2 ist logisch, da die Induktivität quadratisch mit der Windungszahl abnimmt, in unserem Fall ist L_2 der halben Spule ein Viertel der Induktivität der ganzen Spule (L_{ges} = 0,0023).

6. Abgleichbedingungen für Real- und Imaginärteil von Abbildung 3 a) in der Angabe

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1\right)^{-1}}{\left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}\right)} = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{10 - A}{A}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1} + \ i\omega C_1 R_2 - \frac{i}{\omega R_1 C_2} + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 C_1}{C_2} + i\left(\omega C_1 R_2 R_3 - \frac{R_3}{\omega R_1 C_2}\right)$$

Imaginärteil wird Null → Abgleichbedingung für Imaginärteil:

$$\omega C_1 R_2 R_3 = \frac{R_3}{\omega R_1 C_2} \ \rightarrow \ R_1 R_2 = \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}$$

Daraus folgt als Abgleichgleichung für den Realteil:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} + \frac{R_3 C_1}{C_2} \rightarrow \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

Zur Bestimmung der Kapazität nach Formel (5) sind keine Widerstände erforderlich, sie fallen durch den Nullabgleich weg und spielen keine Rolle.

7. Bestimmung der Kapazität eines Kondensators mit einem Vergleichskondensator mit einer Kapazität von $1\mu F$, mit Formel (5):

A = $\mathbf{7,16 \pm 0,01}$ $\mathbf{4,46\ \mu F}$

4. ZUSAMMENFASSUNG

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Wheatstonesche Brücke eine relativ genaue Möglichkeit zur Bestimmung von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten ist. Vorausgesetzt, dass eine hohe Genauigkeit beim Vergleichswiderstand vorliegt. Ein weiterer Vorteil der Brückenschaltung ist die einfache Handhabung der Schaltung, dadurch kann man recht schnell den gesuchten Wert ermitteln.

5. Anhang

Daten

Fehlerrechnung

Es werden hier nur statistische Fehler betrachtet, da über systematische keine Informationen vorliegen.

- **Aufgabe 1:**

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\Delta R_2 \cdot \frac{10-A}{A}\right)^2 + \left(\Delta A \cdot R_2 . \frac{10}{A^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

Allgemeine Formel für den gewichteten Mittelwert:

$$R_{mean} = \frac{\sum g_i \cdot R_i}{\sum g_i} = 0{,}11\ \Omega$$ g ist hierbei die jeweilige Gewichtung, hier das Inverse des Fehlers

$$\sigma_{R_{mean}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \sum_{i=1}^{3} (R_i - R_{mean})^2} = siehe\ Tabelle$$

Vergleichswiderstand[Ω]	**10**	**30**	**100**
ΔA	0,01	0,01	0,01
$\boldsymbol{\Delta R_2}$ **[Ω]**	0,1	0,3	1
$\boldsymbol{\Delta R_1}$ **[Ω]**	0,1	0,1	0,2
$\boldsymbol{\sigma_{R_{mean}}}$ **[Ω]**	0,04		

- **Aufgabe 2:**

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\Delta R_2 \cdot \frac{10-A}{A}\right)^2 + \left(\Delta A \cdot R_2 . \frac{10}{A^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

	Spule 1 (kleine Spule)	**Spule 2 (große Spule)**
$\boldsymbol{\Delta R_2}$ **[Ω]**	0,1	0,1
ΔA	0,01	0,01
$\boldsymbol{\Delta R_1}$ **[Ω]**	0,008	0,07

Abgriff in der Mitte von Spule 2

	Anfang / Mitte	**Mitte /Ende**
$\boldsymbol{\Delta R_1}$ **[Ω]**	0,006	0,006

- **Aufgabe 3:**

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\Delta R_2 \cdot \frac{10-A}{A}\right)^2 + \left(\Delta A \cdot R_{2\cdot} \frac{10}{A^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\Delta U \cdot \left(\frac{1}{R_1 + R_2}\right)\right)^2 + \left(\Delta R_1 \cdot U \cdot \frac{1}{(R_1 + R_2)^2}\right)^2 + \left(\Delta R_2 \cdot U \cdot \frac{1}{(R_1 + R_2)^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

$$\Delta P = \sqrt{(\Delta R_1 \cdot I^2)^2 + (\Delta I \cdot 2 * R_1 \cdot I)^2} = siehe\ Tabelle$$

1. Bei fester Spannung 1 V

Vergleichswiderstand [Ω]	**10**	**30**	**100**	**200**
ΔA	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔU [V]	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔR_2 [Ω]	0,1	0,3	1	2
ΔR_1 [Ω]	0,07	0,04	0,06	0,10
ΔI [A]	0,001	0,002	0,002	0,002

2. Fester Vergleichswiderstand von 10Ω

Spannung [V]	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ΔA	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔU [V]	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔR_2 [Ω]	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
ΔR_1 [Ω]	0,1	0,2	0,3	0,3	0,3
ΔI [A]	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002

3. Fester Vergleichswiderstand von 30 Ω

Spannung [V]	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ΔA	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔU [V]	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔR_2 [Ω]	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
ΔR_1 [Ω]	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
ΔI [A]	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003

4. Fester Vergleichswiderstand von 200 Ω

Spannung [V]	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ΔA	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔU [V]	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ΔR_2 [Ω]	2	2	2	2	2
ΔR_1 [Ω]	0,3	0,4	0,4	0,6	0,9
ΔI [A]	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003

- **Aufgabe 4:**

$$\Delta L_1 = \sqrt{\left(\Delta L_2 \cdot \frac{10-A}{A}\right)^2 + \left(\Delta A \cdot L_{2\cdot} \frac{10}{A^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

$\Delta L_2 [H]$	**0,0001**
ΔA	0,001
ΔL_1 [H]	0,00014

- **Aufgabe 5:**

$$\Delta L_2 = \sqrt{\left(\Delta L_1 \cdot \frac{A}{10-A}\right)^2 + \left(\Delta A \cdot L_{1\cdot} \frac{10}{(10-A)^2}\right)^2} = siehe\ Tabelle$$

$\boldsymbol{\Delta L_1}$ $[\boldsymbol{H}]$	**0,00014**
***Δ*A**	0,01
$\boldsymbol{\Delta L_2}$ $[\boldsymbol{H}]$	0,00002

6. LITERATURVERZEICHNIS

1. M. Saß. “Umgang mit Unsicherheiten”. 09.07.08.
2. M. Saß. “Elektrodynamik und Magnetimus – Brückenschaltungen“. 24.04.09.

Gerätekenndaten:

- Amperemeter: WHE Strommess 1, Klasse 2,5
- Spannungsmessgerät: Voltcraft VC120
- Spannungsquelle: Voltcraft VLP 1302A
- Oszilloskop Aufbau 1: Voltcraft 632FG
- WHE Spule 1, $L = (0{,}0023 \pm 0{,}0001)H$, N = 250, R = 0,6$\boldsymbol{\Omega}$